

ESAME DI STATO DI ISTITUTO TECNICO INDUSTRIALE
Sessione ordinaria 2008 – Indirizzo Elettrotecnica e Automazione
Seconda prova scritta – Tema di Elettrotecnica

Due trasformatori con le seguenti caratteristiche:

potenza nominale	tensione nominale primaria	tensione secondaria a vuoto	potenza di corto circuito	potenza a vuoto	$\cos \varphi_{cc}$
120 kVA	20 kV	400 V	2,4%	0,9%	0,4
160 kVA	20 kV	400 V	2,2%	0,8%	0,4

sono collegati in parallelo per alimentare, alla loro tensione nominale di 380 V, i seguenti tre motori asincroni trifase a 4 poli:

numero motori	potenza nominale	rendimento	$\cos \varphi$	coppia nominale
2	90 kW	0,94	0,86	581 Nm
1	30 kW	0,92	0,83	195 Nm

Il candidato, fatte eventuali ipotesi aggiuntive, calcoli:

- la corrente erogata da ogni trasformatore e il rendimento complessivo del parallelo considerando che i motori lavorano nelle condizioni nominali;
- lo scorrimento per ogni motore.

Inoltre, considerato che il motore di potenza 30 kW ha un rapporto di trasformazione tra statore e rotore di 1,3, che le perdite meccaniche sono pari a 750 W e che nella prova a vuoto il motore ha assorbito una potenza di 1800 W con $\cos \varphi_0 = 0,25$, si determini:

- il rendimento nominale del motore;
- il valore della resistenza del reostato da inserire su ciascuna fase del rotore per ottenere una riduzione del 10% della velocità del motore, con la stessa coppia applicata.

Infine, considerato che uno dei motori di potenza nominale 90 kW lavora in modo non continuativo, il candidato illustri le conseguenze sull'impianto, durante la fase di fermo, in particolare in riferimento al suo rendimento complessivo.

Schema unifilare dell'impianto

È riportato nella **figura 1**. I due trasformatori sono indicati come TA e TB, mentre i motori con le sigle M1, M2, M3.

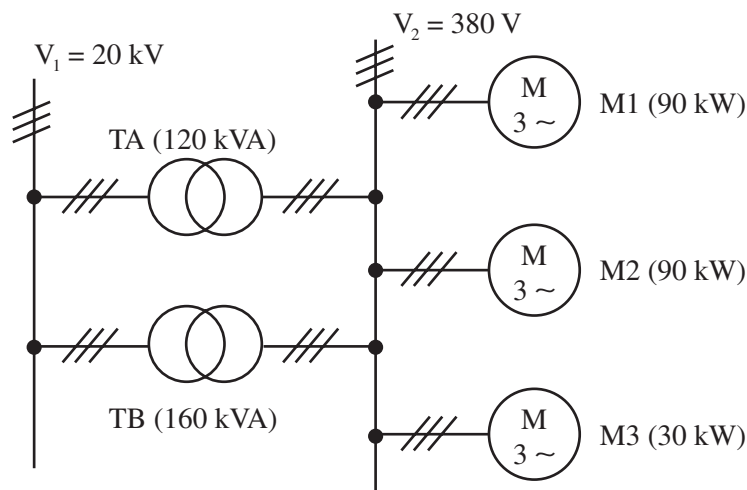


Figura 1 Schema unifilare dell'impianto.

Svolgimento domanda 1, parte a

Si suppone, non essendo indicata nel testo, che la frequenza di alimentazione sia 50 Hz e che le potenze nominali dei motori, come normalmente avviene, siano quelle meccaniche rese.

Per calcolare la potenza totale richiesta ai due trasformatori si applica il metodo di Boucherot, considerando che i motori lavorano in condizioni nominali, come specificato nel testo.

Le potenze, attive e reattive, assorbite dai tre motori sono uguali a:

$$P_{a1} = \frac{P_{n1}}{\eta_1} = \frac{90}{0,94} = 95,745 \text{ kW} = 95\,745 \text{ W}$$

$$P_{a2} = P_{a1} = 95\,745 \text{ W}$$

$$P_{a3} = \frac{P_{n3}}{\eta_3} = \frac{30}{0,92} = 32,609 \text{ kW} = 32\,609 \text{ W}$$

$$Q_{a1} = P_{a1} \tan_1 \varphi = 95\,745 \times 0,5943 = 56\,812 \text{ var}$$

$$Q_{a2} = Q_{a1} = 56\,812 \text{ var}$$

$$Q_{a3} = P_{a3} \tan_3 \varphi = 32\,609 \times 0,672 = 21\,913 \text{ var}$$

Le potenze, attiva e reattiva, complessivamente erogate dai due trasformatori, sono date da:

$$P_2 = P_{a1} + P_{a2} + P_{a3} = 95\,745 \times 2 + 32\,609 = 224\,099 \text{ W} \cong 224 \text{ kW}$$

$$Q_2 = Q_{a1} + Q_{a2} + Q_{a3} = 56\,812 \times 2 + 21\,913 = 135\,537 \text{ var} \cong 135,5 \text{ kvar}$$

Il fattore di potenza del carico complessivo dei due trasformatori è pari a:

$$\cos \varphi_2 = \cos \tan^{-1} \frac{Q_2}{P_2} = \cos \tan^{-1} \frac{135,5}{224} = 0,856$$

La corrente secondaria complessivamente erogata dai trasformatori in parallelo è data da:

$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3} V_2 \cos \varphi_2} = \frac{224\,099}{\sqrt{3} \times 380 \times 0,856} = 397,8 \text{ A}$$

Per effettuare la ripartizione di questa corrente tra i due trasformatori occorre calcolare i parametri degli stessi.

Per il trasformatore TA si ottiene:

$$I_{2nA} = \frac{S_{nA}}{\sqrt{3} V_{20n}} = \frac{120\,000}{\sqrt{3} \times 400} = 173,2 \text{ A}$$

$$P_{ccnA} = \frac{2,4 S_{nA}}{100} = \frac{2,4 \times 120\,000}{100} = 2880 \text{ W}$$

$$R_{2ccA} = \frac{P_{ccnA}}{3 I_{2nA}^2} = \frac{2880}{3 \times 173,2^2} = 0,032 \, \Omega$$

$$V_{ccA} \% = \frac{P_{ccA} \%}{\cos \varphi_{ccA}} = \frac{2,4}{0,4} = 6\%$$

$$V_{2ccA} = \frac{V_{ccA} \% V_{20n}}{100} = \frac{6 \times 400}{100} = 24 \text{ V}$$

$$Z_{2ccA} = \frac{V_{2ccA}}{\sqrt{3} I_{2nA}} = \frac{24}{\sqrt{3} \times 173,2} = 0,08 \, \Omega$$

$$X_{2ccA} = Z_{2ccA} \sin \varphi_{ccA} = 0,08 \times 0,9165 = 0,0733 \, \Omega$$

Per il trasformatore TB si calcolano i valori:

$$I_{2nB} = \frac{S_{nB}}{\sqrt{3} V_{20n}} = \frac{160\,000}{\sqrt{3} \times 400} = 230,9 \text{ A}$$

$$P_{ccnB} = \frac{2,2 S_{nB}}{100} = \frac{2,2 \times 160\,000}{100} = 3520 \text{ W}$$

$$R_{2ccB} = \frac{P_{ccnB}}{3 I_{2nB}^2} = \frac{3520}{3 \times 230,9^2} = 0,022 \, \Omega$$

$$V_{ccB} \% = \frac{P_{ccB} \%}{\cos \varphi_{ccB}} = \frac{2,2}{0,4} = 5,5 \%$$

$$V_{2ccB} = \frac{V_{ccB} \% V_{20n}}{100} = \frac{5,5 \times 400}{100} = 22 \text{ V}$$

$$Z_{2ccB} = \frac{V_{2ccB}}{\sqrt{3} I_{2nB}} = \frac{22}{\sqrt{3} \times 230,9} = 0,055 \, \Omega$$

$$X_{2ccB} = Z_{2ccB} \sin \varphi_{ccB} = 0,055 \times 0,9165 = 0,0504 \, \Omega$$

Poiché i trasformatori hanno lo stesso valore di φ_{cc} le due correnti erogate sono in fase tra loro e si può quindi usare la regola del partitore di corrente applicata solo con i moduli delle impedenze, senza ricorrere al calcolo simbolico. Si ottiene:

$$I_{2A} = I_2 \frac{Z_{2ccB}}{Z_{2ccA} + Z_{2ccB}} = 397,8 \frac{0,055}{0,08 + 0,055} = 162,1 \text{ A}$$

$$I_{2B} = I_2 \frac{Z_{2ccA}}{Z_{2ccA} + Z_{2ccB}} = 397,8 \frac{0,08}{0,08 + 0,055} = 235,7 \text{ A}$$

I due trasformatori funzionano con frazioni di carico pari a:

$$\alpha_A = \frac{I_{2A}}{I_{2nA}} = \frac{162,1}{173,2} = 0,936 \qquad \alpha_B = \frac{I_{2B}}{I_{2nB}} = \frac{235,7}{230,9} = 1,02$$

Il primo trasformatore funziona quindi leggermente sotto carico, mentre il secondo lavora praticamente a carico nominale (sovraccarico del 2%).

Per calcolare il rendimento complessivo del parallelo si deve tener presente che il complesso TA + TB eroga la potenza attiva totale $P_2 = 224 \text{ kW}$ e assorbe dalla linea la potenza $P_1 = P_2 + P_{PT}$, dove P_{PT} è la somma delle perdite nel ferro e nel rame dei due trasformatori.

Le perdite nel ferro sono praticamente uguali alle potenze a vuoto nominali, ritenendo che i trasformatori funzionino alla loro tensione nominale:

$$P_{fA} \cong P_{0A} = \frac{P_{0A} \% S_{nA}}{100} = \frac{0,9 \times 120\,000}{100} = 1080 \text{ W}$$

$$P_{fB} \cong P_{0B} = \frac{P_{0B} \% S_{nB}}{100} = \frac{0,8 \times 160\,000}{100} = 1280 \text{ W}$$

Le perdite nel rame vanno riferite alle correnti erogate, tenendo conto delle frazioni di carico calcolate:

$$P_{cuA} \cong P_{ccA} = \alpha_A^2 P_{ccnA} = 0,936^2 \times 2880 = 2523 \text{ W}$$

$$P_{cuB} \cong P_{ccB} = \alpha_B^2 P_{ccnB} = 1,02^2 \times 3520 = 3662 \text{ W}$$

Si ottiene quindi:

$$P_{PT} = P_{fA} + P_{cuA} + P_{fB} + P_{cuB} = 1080 + 2523 + 1280 + 3662 = 8545 \text{ W} = 8,545 \text{ kW}$$

$$P_1 = P_2 + P_{PT} = 224 + 8,545 = 232,545 \text{ kW}$$

$$\eta_T = \frac{P_2}{P_1} = \frac{224}{232,545} = 0,9633 = 96,33\%$$

Svolgimento domanda 2, parte a

Dato che tutti i motori funzionano nelle condizioni nominali, dalla formula della coppia nominale $C_n = (60 P_n) / (2 \pi n)$ si ricavano i valori della velocità di rotazione.

$$n_1 = \frac{60 P_{n1}}{2 \pi C_{n1}} = \frac{60 \times 90\,000}{2 \pi \times 581} = 1479 \text{ giri/min}$$

$$n_2 = \frac{60 P_{n2}}{2 \pi C_{n2}} = \frac{60 \times 90\,000}{2 \pi \times 581} = 1479 \text{ giri/min}$$

$$n_3 = \frac{60 P_{n3}}{2 \pi C_{n3}} = \frac{60 \times 30\,000}{2 \pi \times 195} = 1469 \text{ giri/min}$$

Tutti i motori, essendo a 4 poli, hanno velocità di sincronismo $n_0 = 60 f / p = 60 \times 50 / 2 = 1500 \text{ giri/min}$, per cui i valori dello scorrimento per i tre motori è:

$$s_1 = s_2 = \frac{n_0 - n_1}{n_0} = \frac{1500 - 1479}{1500} = 0,014 = 1,4\%$$

$$s_3 = \frac{n_0 - n_3}{n_0} = \frac{1500 - 1469}{1500} = 0,0207 = 2,07\%$$

Svolgimento domanda 1, parte b

Nel testo è indicato come dato di targa del motore M3 il valore 0,92 del rendimento, per cui è lecito supporre che tale valore sia quello nominale, corrispondente anche al valore di funzionamento, dato che il motore funziona in condizioni nominali.

Si assume quindi $\eta_n = 0,92$.

Svolgimento domanda 2, parte b

Il motore M3 è, evidentemente, del tipo con rotore avvolto, a cui viene collegato il reostato di avviamento. È noto il valore del rapporto di trasformazione a vuoto $K_0 = 1,3$.

Per determinare la resistenza del reostato da inserire occorre calcolare le resistenze delle fasi statoriche e rotoriche, operando sulle potenze perse. Si ottiene:

$$P_r = P_n = 30 \text{ kW} \quad P_a = \frac{P_r}{\eta} = \frac{30}{0,92} = 32,609 \text{ kW} = 32\,609 \text{ W}$$

La corrente assorbita da ogni fase statorica è:

$$I_1 = \frac{P_a}{\sqrt{3} V_1 \cos \varphi_1} = \frac{32\,609}{\sqrt{3} \times 380 \times 0,83} = 59,7 \text{ A}$$

Ritenendo trascurabile la perdita nel rame statorica a vuoto, dalla potenza a vuoto si ottiene la perdita nel ferro:

$$P_f = P_0 - P_{av} = 1800 - 750 = 1050 \text{ W}$$

Le perdite addizionali si ritengono convenzionalmente pari allo 0,5% della potenza assorbita:

$$P_{add} = \frac{0,5 P_a}{100} = \frac{0,5 \times 32\,609}{100} = 163 \text{ W}$$

La potenza persa totale è data da: $P_p = P_a - P_r = 32\,609 - 30\,000 = 2609 \text{ W}$ e quindi la perdita nel rame totale è:

$$P_{jT} = P_{j1} + P_{j2} = P_p - P_f - P_{av} - P_{add} = 2609 - 1050 - 750 - 163 = 646 \text{ W}$$

Sapendo che la potenza trasmessa è data da: $P_t = P_r + P_{j2} + P_{av}$ e che $P_{j2} = s P_t$ è possibile ricavare la perdita nel rame rotorica, ottenendo: $P_{j2} = 649 \text{ W}$.

È evidente che questo risultato è in contraddizione con il precedente, in quanto il valore di P_{j2} supera quello della perdita nel rame totale. Ciò significa che i dati indicati nel testo non sono tutti coerenti tra loro. Per proseguire nella soluzione occorre fare delle ipotesi aggiuntive. In particolare si suppone che le perdite nel rame siano equamente distribuite tra statore e rotore:

$$P_{j1} = P_{j2} = \frac{P_{jT}}{2} = \frac{646}{2} = 323 \text{ W}$$

per cui la resistenza di fase rotorica è data da:

$$R_1 = \frac{P_{j1}}{3 I_1^2} = \frac{323}{3 \times 59,7^2} = 0,0302 \, \Omega$$

Essendo di piccolo valore si trascura la corrente a vuoto e si ritiene quindi che la corrente primaria di reazione sia uguale a quella statorica: $I'_2 \cong I_1 = 59,7 \text{ A}$, da cui si ricava la corrente rotorica $I_2 = K_0 I'_2 = 1,3 \times 59,7 = 77,6 \text{ A}$.

La resistenza di ogni fase rotorica è data da:

$$R_2 = \frac{P_{j2}}{3 I_2^2} = \frac{323}{3 \times 77,6^2} = 0,0179 \, \Omega$$

Inserendo il reostato rotorico il punto di lavoro si sposta dalla caratteristica meccanica 1 (senza reostato) alla 2 (**figura 2**) e, a parità di coppia, la velocità di rotazione si riduce.

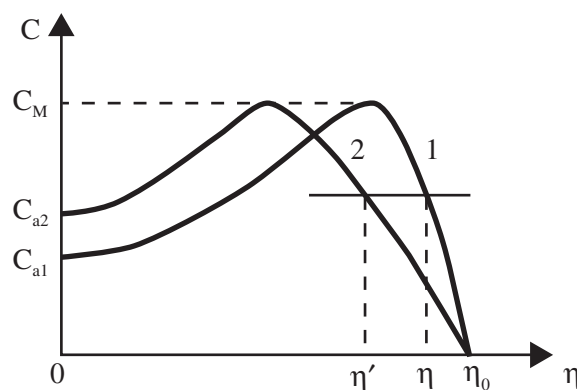


Figura 2 Riduzione della velocità per effetto del reostato di avviamento.

Il nuovo valore della velocità è: $n' = 0,9 n_3 = 0,9 \times 1469 = 1322 \text{ giri/min}$, a cui corrisponde lo scorrimento:

$$s' = \frac{n_0 - n'}{n_0} = \frac{1500 - 1322}{1500} = 0,1187$$

Dall'espressione della coppia:

$$C = \frac{p R_2' V_1^2}{2 \pi f s \left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s} \right)^2 + X_{1cc}^2 \right]}$$

dove $R_2' = K_0^2 R_2$ e X_{1cc} è la reattanza totale riportata allo statore, mediante opportuni passaggi e ritenendo trascurabili i termini sR_1 e sX_{1cc} legati allo scorrimento, di piccolo valore, si ottiene:

$$C \cong \frac{p V_1^2}{2 \pi f K_0^2} \frac{s}{R_2} = K_c \frac{s}{R_2}$$

avendo conglobato nella costante K_c tutti i termini che, non dipendendo dalla variazione della resistenza rotorica, rimangono costanti nel caso in esame.

Poiché alle due velocità la coppia deve essere uguale, considerando le condizioni di funzionamento $s = 0,0207$ con $R_2 = 0,0179 \Omega$ e $s' = 0,1187$ con resistenza $R_2 + R_r = 0,0179 + R_r$, dove R_r è la resistenza del reostato, si ottiene l'uguaglianza:

$$K_c \frac{s}{R_2} = K_c \frac{s'}{R_2 + R_r}$$

da cui si ricava:

$$R_r = R_2 \frac{s' - s}{s} = 0,0179 \frac{0,1187 - 0,0207}{0,0207} = 0,0847 \Omega$$

Svolgimento della parte finale

Quando uno dei motori da 90 kW è in stato di fermo, supponendo che sia staccato dall'impianto in modo da non considerare la sua potenza a vuoto, la potenza attiva richiesta al complesso dei trasformatori in parallelo diminuisce e il rendimento varia, dipendentemente dalla curva del rendimento in funzione della frazione di carico.

Svolgendo i calcoli analitici si ottiene:

$$P_2 = P_{a1} + P_{a3} = 95\,745 + 32\,609 = 128\,354 \text{ W}$$

$$Q_2 = Q_{a1} + Q_{a3} = 56\,812 + 21\,913 = 78\,725 \text{ var}$$

$$\cos \varphi_2 = \cos \tan^{-1} \frac{Q_2}{P_2} = \cos \tan^{-1} \frac{78\,725}{128\,354} = 0,852$$

$$I_2 = \frac{P_2}{\sqrt{3} V_2 \cos \varphi_2} = \frac{128\,354}{\sqrt{3} \times 380 \times 0,852} = 228,9 \text{ A}$$

$$I_{2A} = I_2 \frac{Z_{2ccB}}{Z_{2ccA} + Z_{2ccB}} = 228,9 \frac{0,055}{0,08 + 0,055} = 93,3 \text{ A}$$

$$I_{2B} = I_2 \frac{Z_{2ccA}}{Z_{2ccA} + Z_{2ccB}} = 228,9 \frac{0,08}{0,08 + 0,055} = 135,6 \text{ A}$$

I due trasformatori funzionano ora con frazioni di carico pari a:

$$\alpha_A = \frac{I_{2A}}{I_{2nA}} = \frac{93,3}{173,2} = 0,539 \quad \alpha_B = \frac{I_{2B}}{I_{2nB}} = \frac{135,6}{230,9} = 0,587$$

e, quindi, entrambi in condizioni di sottocarico.

Non essendo variata la tensione di alimentazione, la potenza persa nel ferro non cambia e vale $P_f = P_{fA} + P_{fB} = 1080 + 1280 = 2360 \text{ W}$, mentre la nuova perdita nel rame è:

$$P_{cu} = \alpha_A^2 P_{ccnA} + \alpha_B^2 P_{ccnB} = 0,539^2 \times 2880 + 0,587^2 \times 3520 = 2050 \text{ W}$$

Il nuovo valore del rendimento complessivo dei trasformatori in parallelo è:

$$\eta_T = \frac{P_2}{P_2 + P_f + P_{cu}} = \frac{128\,354}{128\,354 + 2360 + 2050} = 0,967 = 96,7\%$$

Il valore del rendimento, pur se maggiore del precedente, è rimasto sostanzialmente uguale, segno che la curva del rendimento in funzione della frazione di carico (o della potenza erogata) presenta una zona piuttosto piatta per ampi valori di α .