RIDUTTORE A DUE ALBERI

DERIVATO DAL TEMA D'ESAME DELLA SESSIONE STRAORDINARIA 2018

9

Il riduttore indicato nella **figura 1**, realizzato con una coppia di ruote dentate cilindriche a denti diritti, è costituito da un pignone di diametro primitivo d_1 = 100 mm che trasmette il moto a un albero condotto su cui è calettata una ruota dentata di diametro primitivo d_2 = 250 mm. La velocità angolare del pignone è pari a 78,54 rad/s.
Il candidato, accompagnando il calcolo con considerazioni tecniche congrue e coerenti, dopo aver scelto un acciaio per le ruote dentate e aver fissato con motivati criteri ogni altro parametro o elemento di calcolo eventualmente mancante e/o necessario, dovrà eseguire:

1. il calcolo della potenza da assegnare al motore elettrico che aziona il pignone, considerando un rendimento del riduttore pari a 0,9, volendo avere all'uscita dell'albero condotto un momento resistente M_r = 340 N m;
2. il dimensionamento della coppia di ruote dentate cilindriche a denti diritti;
3. il calcolo delle forze scambiate tra i denti e quelle che agiscono sui cuscinetti A e B dei due alberi;
4. il dimensionamento dell'albero motore, considerando i seguenti elementi di calcolo:
   – potenza del motore elettrico: P = 15 kW;
   – numero di giri del motore elettrico: n_1 = 1000 giri/min;
   – carico di rottura dell'acciaio dell'albero motore: R_m = 600 N/mm^2.

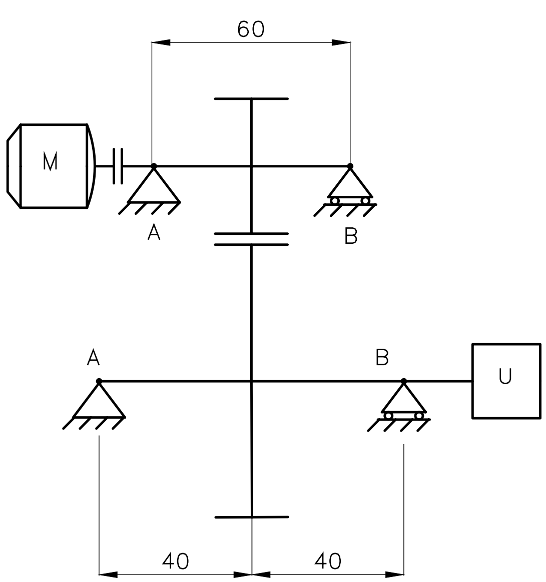

Fig. 1
Schema della trasmissione.

SOLUZIONE

1. ***Calcolo della potenza***

Noti i diametri primitivi delle due ruote, è immediato trovare il rapporto di trasmissione:

$$i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{250}{100} = 2,5$$

Nel caso specifico del riduttore a ruote dentate, indicando con ω_1 la velocità angolare del pignone (ruota motrice) e con ω_2 la velocità angolare della ruota condotta, si ha che:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{i} = \frac{78,54}{2,5} = 31,416 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La frequenza di rotazione del pignone vale:

$$n_1 = \frac{30\ \omega_1}{\pi} = \frac{30 \times 78,54}{\pi} = 750 \ \frac{\text{giri}}{\text{min}}$$

La potenza uscente vale:

$$P_2 = M_2\ \omega_2 = 340 \times 31,416 = 10\ 681,5 \ \text{W}$$

La potenza effettiva P_{eff} erogata dal motore vale:

$$P_{eff} = \frac{P_2}{\eta} = \frac{10\ 681,5}{0,9 \times 1000} = 11,9 \ \text{kW} \cong 12 \ \text{kW}$$

2. ***Calcolo delle ruote dentate***

Il dimensionamento della coppia di ruote dentate a denti dritti che costituiscono il riduttore verrà condotto mediante calcolo a fatica, seguito dalla verifica a usura. Il testo impone il seguente vincolo costruttivo: il modulo calcolato deve confermare, se moltiplicato per i rispettivi numeri di denti al momento incogniti, entrambi i diametri primitivi imposti dal testo. La formula di riferimento è:

$$d = m\ z$$

Conviene scomporre i due numeri che esprimono i diametri primitivi in fattori primi. Per il pignone si trova che:

$$100 = 2^2 \times 5^2$$

Per la corona si trova che:

$$250 = 2 \times 5^3$$

Ne consegue che vi sono due soli valori di modulo unificati che possono soddisfare questo vincolo costruttivo: m = 2 mm; m = 5 mm. Escludendo il valore da 2 mm, evidentemente insufficiente a reggere una potenza da 12 kW, si esegue la verifica del modulo da 5 mm. Inizialmente si determinano i numeri di denti delle due ruote che garantiscono il rapporto di trasmissione i = 2,5:

$$z_1 = \frac{d_1}{m} = \frac{100}{5} = 20$$

$$z_2 = \frac{d_2}{m} = \frac{250}{5} = 50$$

Come materiale si sceglie l'acciaio C15 da cementazione, avente un carico di rottura R_m = 500 ÷ 650 N/mm^2: si sceglie il valore intermedio pari a 575 N/mm^2.

Nell'ipotesi che il riduttore operi regolarmente in entrambi i versi di rotazione e che i sovraccarichi e gli urti siano infrequenti, si assume il grado di sicurezza $g_R = 3$; si calcola la tensione ammissibile a fatica alterna:

$$\sigma_{amf} = \frac{R_m}{3\ g_R} = \frac{575}{3 \times 3} = 64\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Il momento torcente M_t agente sulla puleggia motrice vale:

$$M_t = \frac{P_{eff}}{\omega_1} = \frac{12\ 000}{78{,}54} = 152{,}8\ \text{N m} = 152\ 800\ \text{N mm}$$

Si sceglie il fattore di servizio f_s = 1,2 dato che il servizio è continuativo, inoltre non sono presenti né sovraccarichi, né contraccolpi alla partenza; il momento corretto M_{corr} vale:

$$M_{corr} = f_s\ M_t = 1{,}2 \times 152\ 800 = 183\ 360\ \text{N mm}$$

Si verifica il modulo m = 5 mm a fatica; a tale scopo occorre definire i valori numerici dei diversi fattori. Si sceglie un valore prudenziale del coefficiente λ che definisce la lunghezza del dente in base al modulo: λ = 20. La velocità periferica per la ruota minore, la motrice, vale:

$$v_1 = \omega_1 \times \frac{d_1}{2} = 78{,}54 \times \frac{100}{2} = 3927\ \frac{\text{mm}}{\text{s}} \cong 3{,}93\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Con questo valore di v_1 si calcola il coefficiente di maggiorazione dinamica del carico, attribuendo al coefficiente empirico A il valore di 4:

$$X_v = \frac{A}{A + v_1} = \frac{4}{4 + 3{,}93} = 0{,}5044$$

Si ricava il fattore di Lewis dalla **tabella I.88** relativa ai coefficienti y di Lewis riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. I-127): per $z = 20$ denti si assume $y = 0{,}32$. Si verifica il modulo a fatica, valutando la tensione di lavoro mediante la formula di Lewis:

$$\sigma_l = \frac{2\ M_{corr}}{m^3\ X_v\ z\ \lambda\ y} = \frac{2 \times 183\ 360}{5^3 \times 0{,}5044 \times 20 \times 20 \times 0{,}32} = 45{,}44\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Il valore di tensione di lavoro è decisamente inferiore al valore della tensione ammissibile a fatica. Conviene intervenire su qualche parametro quale, per esempio, il coefficiente λ che, se ridotto, comporta una minore lunghezza del dente, riducendo pesi e costi e aumentando la tensione di lavoro, purché si rimanga in condizioni di sicurezza; si passa a λ = 15:

$$\sigma_l = \frac{2\ M_{corr}}{m^3\ X_v\ z\ \lambda\ y} = \frac{2 \times 183\ 360}{5^3 \times 0{,}5044 \times 20 \times 15 \times 0{,}32} = 60{,}6\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Questo valore di tensione di lavoro è ottimale. Si completa ora il calcolo del modulo delle ruote dentate mediante verifica a usura del valore precedentemente trovato. Inizialmente si calcola la pressione ammissibile in funzione della durezza dell'acciaio scelto. Si attribuisce all'ingranaggio la durata h = 30 000 in ore (funzionamento per 8 ore su 24), desunta dalla **tabella I.90** relativa ai valori orientativi delle ore di funzionamento h riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. I-128); con questo dato si ottiene la pressione ammissibile che vale:

$$p_{amm} = 2{,}45 \frac{\text{HB}}{\sqrt[6]{n\ h}} = 2{,}45 \times \frac{700}{\sqrt[6]{750 \times 30\ 000}} = 2{,}45 \times \frac{700}{16{,}8} = 102\ \frac{\text{daN}}{\text{mm}^2} \cong 1020\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

La lunghezza del dente vale:

$$b = \lambda\ m = 15 \times 5 = 75 \text{ mm}$$

Infine la pressione di contatto massima che si ha sul fianco del dente vale:

$$p_{max} = K_1 \sqrt{\frac{2\ M_{corr,1}}{b\ d_1\ \text{sen}\ 2\alpha}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)} = 378 \times \sqrt{\frac{2 \times 183\ 360}{75 \times 100 \times \text{sen}\ 40°} \times \left(\frac{1}{100}+\frac{1}{250}\right)} = 390\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Il valore è accettabile in quanto ampiamente inferiore al valore ammissibile.

3. *Calcolo delle forze scambiate tra i denti e delle reazioni vincolari*

Il pignone è posizionato nella mezzeria della campata AB. Attraverso i denti in presa esso scambia una forza risultante con la ruota condotta; tale forza F è inclinata dell'angolo di pressione e viene di regola scomposta in due componenti, una tangenziale F_t agente sul piano orizzontale e una radiale F_r agente sul piano verticale (piano del disegno, riportato nella **figura 1**). Esse valgono rispettivamente:

$$F_t = 2\frac{M_t}{d_1} = \frac{2 \times 152\ 800}{100} = 3056 \text{ N}$$

$$F_r = F_t\ \text{tg}\ \alpha = 3056 \times \text{tg}\ 20° = 1112{,}3 \text{ N}$$

Per evidenti ragioni di simmetria le reazioni vincolari nel piano verticale sono uguali e valgono:

$$V_A = V_B = \frac{F_r}{2} = \frac{1112{,}3}{2} \cong 556{,}1 \text{ N}$$

Anche le reazioni nel piano orizzontale sono uguali:

$$H_A = H_B = \frac{F_t}{2} = \frac{3056}{2} = 1528 \text{ N}$$

La ruota dentata posizionata sull'albero condotto è, anche in questo caso, posizionata nella mezzeria della campata AB. Ne consegue che, per ragioni di simmetria, le reazioni vincolari sono le stesse già trovate nel caso precedente, salvo i versi che sono invertiti.

4. *Dimensionamento completo dell'albero*

In questo secondo caso, si calcolano le reazioni vincolari in riferimento ai valori della potenza e della frequenza di rotazione dell'albero motore, noti, e della geometria del pignone determinata in precedenza. Viene anche data la tensione di rottura dell'acciaio impiegato per la costruzione dell'albero: $R_m = 600$ N/mm^2.

Non essendo state fornite indicazioni riguardanti la gravosità (o meno) delle condizioni di funzionamento, si attribuisce al grado di sicurezza per i laminati in acciaio un valore intermedio: $g_R = 2{,}7$.

La tensione ammissibile statica vale:

$$\sigma_{ams} = \frac{R_m}{g_R} = \frac{600}{2{,}7} = 222{,}2\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

La tensione ammissibile σ_{amf} a fatica alterna vale:

$$\sigma_{amf} = \frac{\sigma_{ams}}{3} = \frac{222{,}2}{3} = 74\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

La velocità angolare del pignone vale:

$$\omega_1 = \frac{2\ \pi\ n_1}{60} = \frac{2 \times \pi \times 1000}{60} = 104{,}72\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Il momento torcente M_t agente sull'albero motore vale:

$$M_t = \frac{P_{eff}}{\omega_1} = \frac{15\ 000}{104{,}72} = 143{,}24\ \text{N m} = 143\ 240\ \text{N mm}$$

Ora si calcolano le due componenti della forza risultante scambiata con la ruota condotta: esse sono la componente tangenziale F_t agente sul piano orizzontale e la componente radiale F_r agente sul piano verticale (piano del disegno, riportato nella **figura 1**). Esse valgono rispettivamente:

$$F_t = 2\frac{M_t}{d_1} = \frac{2 \times 143\ 240}{100} = 2864{,}8\ \text{N}$$

$$F_r = F_t\ \text{tg}\ \alpha = 2864{,}8 \times \text{tg}\ 20° = 1042{,}7\ \text{N}$$

Le reazioni vincolari nel piano verticale sono:

$$V_A = V_B = \frac{F_r}{2} = \frac{1042{,}7}{2} = 521{,}35\ \text{N}$$

Le reazioni nel piano orizzontale sono:

$$H_A = H_B = \frac{F_t}{2} = \frac{2864{,}8}{2} = 1432{,}4\ \text{N}$$

Il momento flettente massimo M_v nel piano verticale si trova nella mezzeria dell'albero di trasmissione AB:

$$M_v = V_A\ \frac{l}{2} = 521{,}35 \times \frac{0{,}6}{2} = 156{,}4\ \text{N m}$$

Anche il momento flettente massimo M_o nel piano orizzontale si trova nella mezzeria dell'albero di trasmissione:

$$M_o = H_A\ \frac{l}{2} = 1432{,}4 \times \frac{0{,}6}{2} \cong 430\ \text{N m}$$

La risultante M_M dei due momenti massimi perpendicolari fra di loro vale:

$$M_M = \sqrt{{M_v}^2 + {M_o}^2} = \sqrt{156{,}4^2 + 430^2} = 457{,}6\ \text{N m}$$

Si calcola il momento flettente ideale nella sezione di mezzeria:

$$M_{f,id} = \sqrt{M_M^2 + 0{,}75\ M_t^2} = \sqrt{457{,}6^2 + 0{,}75 \times 143{,}24^2} = 474{,}1\ \text{N m}$$

Si sceglie il fattore di servizio $f_s = 1{,}1$ non essendo date informazioni; il momento corretto M_{corr} vale:

$$M_{corr} = f_s\ \ M_{f,id} = 1{,}1 \times 474\ 100 = 521\ 510\ \text{N mm}$$

Si applica la formula di Navier per ottenere il modulo resistente a flessione, che vale:

$$W_f = \frac{M_{f,id}}{\sigma_{amf}} = \frac{521\,510}{74} = 7047{,}4 \text{ mm}^3$$

Si passa infine alla determinazione del diametro nel tratto centrale dell'albero:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\ W_f}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 7047{,}4}{\pi}} = \sqrt[3]{71\,785} = 41{,}56 \text{ mm}$$

Si caletta il mozzo della ruota dentata sull'albero mediante una linguetta, reperibile dalla **tabella I.26** relativa alle linguette (UNI 6604) riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. I-32); la profondità della cava vale t_1 = 5,5 mm, pertanto il diametro utile sarà:

$$d_u = 41{,}56 + 5{,}5 = 47{,}06 \text{ mm}$$

In base alla **tabella E.5** relativa alle dimensioni lineari nominali per organi meccanici riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. E-11), il valore più prossimo di arrotondamento è presente nella serie di Renard R40 e vale 48. Si arrotonda quindi il diametro a 48 mm.