TRASMISSIONE DI POTENZA, ATTRAVERSO UN GIUNTO RIGIDO, AD UN TRENO DI RUOTE DENTATE

8

DERIVATO DAL TEMA D'ESAME DELLA SESSIONE ORDINARIA 2008

Lo schema riportato nella **figura 1** rappresenta un motore elettrico che eroga una potenza nominale di 20 kW a un regime di 750 giri al minuto e, attraverso un giunto rigido G, la trasmette a un treno di quattro ruote dentate a denti dritti. L'ultima ruota è solidale a un verricello A con un tamburo di diametro d = 30 cm. Il rendimento complessivo della catena cinematica rappresentata è η = 0,87 e la velocità media di sollevamento del carico è pari ad 1,35 m/s.

Il candidato, fissato con motivati criteri ogni altro elemento eventualmente mancante, dovrà eseguire:

a) il dimensionamento completo del giunto rigido G e uno schizzo quotato dello stesso;
b) il calcolo del carico massimo Q sollevabile;
c) il calcolo del modulo di entrambe le coppie di ruote dentate.

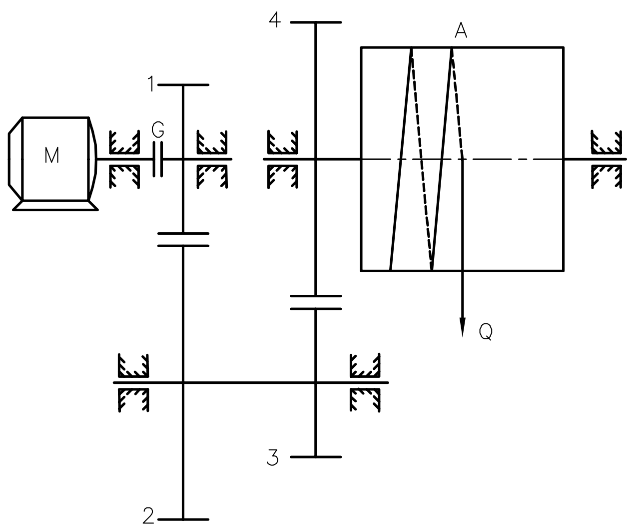

Fig. 1
Schema dell'impianto di sollevamento formato dal motoriduttore e dal tamburo di avvolgimento della fune.

SOLUZIONE

a) ***Dimensionamento del giunto rigido***

Le dimensioni del giunto sono funzione del diametro dell'albero motore, che occorre calcolare.

L'albero, considerato a sezione circolare piena, si dimensiona a torsione semplice e utilizzando come materiale un acciaio non legato da bonifica C40, ricavabile dalla **tabella F.34**, relativa agli acciai non legati da bonifica riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. F-110), con carico unitario di rottura a trazione:

$$R_m = 630 \div 780 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

L'equazione di stabilità a torsione semplice dell'albero è:

$$\frac{M_t}{W_t} \leq \tau'_{amf}$$

in cui:

– la tensione tangenziale ammissibile a fatica pulsante vale:

$$\tau'_{amf} = \frac{2}{3} \times \frac{\sigma_{ams}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{630}{3 \times \sqrt{3}} \cong 81 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

– il momento torcente vale:

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{20 \times 1000}{78,5} = 254,777 \text{ N m}$$

con:

$$\omega = \frac{2 \pi n}{60} = \frac{2 \times \pi \times 750}{60} = 78,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

il modulo di resistenza a torsione è:

$$W_t = \frac{\pi}{16} d^3$$

Dall'equazione di stabilità si ricava il valore del modulo di resistenza a torsione:

$$W_t = \frac{M_t}{\tau'_{amf}} \cong 3145 \text{ mm}^3$$

pertanto il valore del diametro dell'albero risulta:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 3145}{\pi}} = 25,2 \text{ mm}$$

con questo valore del diametro dell'albero si sceglie una linguetta UNI 6604-A8x7x48 con profondità di cava t_1 = 4 mm, dalla tabella I.26, relativa alle linguette (UNI 6604) e riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. I-32), per cui il diametro effettivo dell'albero risulta:

$$d_e = d + t_1 = 25,2 + 4 = 29,2 \text{ mm}$$

si arrotonda a d = 32 mm, il valore superiore più vicino della serie dei numeri di Renard, serie R10 come indicato dalla **tabella E.5** relativa alle dimensioni lineari nominali per organi meccanici, riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. E-11).
In base al diametro dell'albero, si ricavano le dimensioni del giunto (considerandolo a dischi senza anello distanziatore) a partire dalle tabelle dei costruttori o mediante le formule empiriche di seguito riportate.

– Lunghezza del mozzo:

$$L \cong 3d = 96 \text{ mm}$$

– Diametro del mozzo:

$$D_1 \cong 1{,}8\ \mathrm{d} + 20\ \mathrm{mm} = 78\ \mathrm{mm}$$

– Diametro esterno:

$$D_e \cong 2{,}5\ d\ + 100\ \mathrm{mm}\ = 180\ \mathrm{mm}$$

– Diametro medio della superficie anulare dei dischi:

$$D_m \cong 0{,}95 D_e = 171\ \mathrm{mm}$$

– Diametro della circonferenza passante per i centri dei fori:

$$D_b \cong 2{,}2\ d\ + 50\ \mathrm{mm} = 120\ \mathrm{mm}$$

– Lunghezza della corona periferica:

$$2L_1 \cong 0{,}6\ d + 40\ \mathrm{mm} = 59\ \mathrm{mm}$$

Passando al calcolo dei bulloni di collegamento si deve determinare la forza tangenziale ($n_b\ F_t$) che agisce sulla circonferenza media della superficie di contatto dei dischi:

$$F_t = \frac{2\ M_t}{n_b\ D_m} = \frac{2 \times 254\ 777}{4 \times 171} = 745\ \mathrm{N}$$

avendo considerato il numero di bulloni $n_b = 4$ per diametri degli alberi fino a $d = 60$ mm.
Considerando le superfici di contatto del giunto sgrossate d'utensile, la forza di trazione esercitata su ciascun bullone vale:

$$F_a = (3{,}8 \div 4{,}5) F_t$$

ossia:

$$F_a = 4F_t = 2980\ \mathrm{N}$$

Per la verifica di resistenza deve risultare:

$$\sigma_b = \frac{F_a}{A_r} \leq \sigma_{b,ams}$$

da cui, scegliendo la classe di resistenza 4.6 con carico unitario di snervamento $R_{eL} = 240\ \mathrm{N/mm^2}$ e $\sigma_{b,ams} = 60\ \mathrm{N/mm^2}$, si ricava il valore dell'area resistente della vite:

$$A_r = \frac{2980}{60} = 49{,}6\ \mathrm{mm^2}$$

Dalla **tabella I.4** riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. I-12) sulle filettature metriche ISO, a profilo triangolare (UNI 4536), si adotteranno 4 bulloni **M10** con sezione resistente $A_r = 58\ \mathrm{mm^2}$.

b) ***Calcolo del carico massimo sollevabile Q***

Considerando il rendimento complessivo della catena cinematica η = 0,87, il valore della potenza utile risulta:

$$P_u = P_n \ \eta = 20 \times 0,87 = 17,4 \text{ kW}$$

Il carico massimo Q sollevabile si ottiene dall'espressione della potenza del moto di traslazione:

$$P_u = Q \ v$$

da cui si ottiene:

$$Q = \frac{P_u}{v} = \frac{17\ 400}{1,35} \cong 12\ 890 \text{ N}$$

c) ***Calcolo del modulo delle due coppie di ruote dentate***

Il rapporto di trasmissione del rotismo ordinario si valuta conoscendo la velocità di rotazione dell'albero motore e quella dell'albero del verricello.

La velocità angolare ω_{III} dell'albero del verricello si ricava dalla velocità di salita v del carico e dal diametro del tamburo:

$$\omega_{III} = \frac{v}{\frac{d}{2}} = \frac{1,35}{0,15} = 9 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

la velocità angolare dell'albero motore risulta:

$$\omega_I = \frac{2 \ \pi \ n}{60} = \frac{2 \times \pi \times 750}{60} = 78,5 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

pertanto il rapporto di trasmissione totale vale:

$$i = \frac{\omega_I}{\omega_{III}} = 8,72$$

Il rapporto di trasmissione totale è uguale al prodotto dei rapporti di trasmissione dei singoli ingranaggi:

$$i = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} \ \frac{\omega_{II}}{\omega_{III}}$$

in cui:

– ω_I indica la velocità dell'albero motore ed è uguale alla velocità angolare del pignone 1 del primo ingranaggio:

$$\omega_I = \omega_1$$

– ω_{II} indica la velocità angolare dell'albero intermedio su cui sono calettate la corona 2 del primo ingranaggio e il pignone 3 del secondo ingranaggio, pertanto hanno la stessa velocità di rotazione:

$$\omega_{II} = \omega_2 = \omega_3$$

– ω_{III} indica la velocità dell'albero del verricello ed è uguale alla velocità angolare della corona 4 del secondo ingranaggio:

$$\omega_{III} = \omega_4$$

Quindi si ha:

$$i = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} \frac{\omega_{II}}{\omega_{III}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{\omega_3}{\omega_4}$$

per cui si può suddividere il rapporto di trasmissione totale nei seguenti rapporti di trasmissione parziali:

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 3$$

$$i_{3,4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = 2{,}9$$

Inoltre, avendo un rendimento complessivo η_g = 0,87, si possono ipotizzare i seguenti rendimenti parziali:
– rendimento del giunto:

$$\eta_g = 0{,}97$$

– rendimento di ciascuna coppia di ruote dentate:

$$\eta_I = \eta_{II} = 0{,}95$$

Il modulo di entrambe le coppie di ruote dentate si ricava eseguendo il calcolo a flessione con il metodo di Lewis e successivamente la verifica ad usura.

Prima coppia di ruote dentate
Il momento torcente agente sul pignone 1 vale:

$$M_{t1} = \frac{P}{\omega_1}\,\eta = 254\ 777 \times 0{,}97 = 247\ 134 \text{ N mm}$$

Non essendo state date indicazioni, si presume che l'ingranaggio lavori in servizio normale senza sovraccarichi, per cui si sceglie un fattore di servizio f_s=1,1, con il quale si ottiene il momento corretto:

$$M_{corr,1} = 247\ 134 \times 1{,}1 = 271\,847 \text{ N mm}$$

Per la costrizione delle ruote dentate si sceglie un acciaio legato da bonifica 38 Ni Cr Mo 4, che presenta le seguenti caratteristiche:

$$\sigma_{amf} = 220\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{HB} = 300\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\ \text{(durezza Brinell)}$$

Inoltre si scelgono i seguenti numeri di denti delle due ruote:
– pignone:

$$z_1 = 30$$

– corona:

$$z_2 = i_{12} \quad z_1 = 3 \times 30 = 90$$

Ipotizzando che:
– l'angolo di pressione sia:

$$\vartheta = 20°$$

– il rapporto fra la larghezza del dente e il modulo sia:

$$\lambda = 15$$

– il valore di primo tentativo del coefficiente di maggiorazione dinamica del carico sia:

$$X_v = 0,4$$

– il fattore di Lewis sia:

$$y = 0,484 - \frac{2,865}{z} = 0,484 - \frac{2,865}{30} = 0,39$$

il valore del modulo secondo la formula di Lewis sarà:

$$m = \sqrt[3]{\frac{2\ M_{corr,1}}{\sigma_{amf}\ \ X_v\ \ z\ \lambda\ y}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 271847}{220 \times 0,4 \times 30 \times 15 \times 0,39}} = 3,3 \text{ mm}$$

si arrotonda tale cifra al valore unificato m = 4 mm (UNI 6586), ricavabile dal *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. I-125).
Occorre verificare la validità del coefficiente di maggiorazione dinamica del carico X_v.
I diametri primitivi delle due ruote dentate sono:

$$d_{p1} = m\ \ z_1 = 4 \times 30 = 120 \text{ mm}$$

$$d_{p2} = m\ \ z_2 = 4 \times 90 = 360 \text{ mm}$$

La velocità periferica del pignone vale:

$$v_1 = \omega_1\ \frac{d_{p1}}{2} = 78,5 \times 0,06 = 4,7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Considerando che:

$$X_v = \frac{A}{A + v_1}$$

con A = 4 per ingranaggi lenti con discreta precisione di lavorazione, si ha:

$$X_v = \frac{A}{A + v_1} = \frac{4}{4 + 4,7} = 0,46$$

essendo maggiore del valore ipotizzato X_v = 0,4, si conferma il valore del modulo m = 4 mm.

Per la verifica a usura occorre fissare il valore della pressione massima p_{amm} ammissibile fra i denti, e fissando una durata di h = 10 000 ore di funzionamento non continuo, come si deduce dall'omonima **tabella I.90** riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. I-128), si ottiene:

$$p_{amm} = 24,5\ \frac{HB}{\sqrt[6]{n\ \ h}} = 24,5 \times \frac{300}{\sqrt[6]{750 \times 10\ 000}} = 525\ \frac{N}{mm^2}$$

La pressione effettivamente scambiata fra i denti delle due ruote risulta:

$$p_{max} = k_1 \sqrt{\frac{2\ M_{corr,1}}{b\ d_{p1}\ \text{sen}2\ \alpha}\left(\frac{1}{d_{p1}} + \frac{1}{d_{p2}}\right)} = 378 \times \sqrt{\frac{2 \times 271\,847}{60 \times 120 \times \text{sen}40} \times \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{360}\right)} = 432\ \frac{N}{mm^2}$$

in cui la larghezza del dente vale:

$$b = \lambda\ m = 15 \times 4 = 60\ \text{mm}$$

Il coefficiente K_1 = 378 tiene conto dei moduli di elasticità normale E delle ruote. Poiché $p_{max} < p_{amm}$, la verifica a usura ha dato esito positivo.

Seconda coppia di ruote dentate

Il momento torcente agente sul pignone 3 vale:

$$M_{t3} = M_{t2} = M_{t1}\ \eta\ i_{1,2} = 247\ 134 \times 0,95 \times 3 = 704\ 332\ \text{N mm}$$

scegliendo il fattore di servizio f_s=1,1, si ottiene il momento corretto:

$$M_{corr,3} = 704\ 332 \times 1,1 = 774\ 765\ \text{N mm}$$

Adottando lo stesso acciaio della prima coppia di ruote si scelgono i seguenti numeri di denti delle due ruote:

– pignone:

$$z_3 = 20$$

– corona:

$$z_4 = i_{3,4}\ z_3 = 2,9 \times 20 = 58$$

Ipotizzando che:

– l'angolo di pressione sia:

$$\vartheta = 20°$$

– il rapporto fra la larghezza del dente e il modulo sia:

$$\lambda = 15$$

– il valore di primo tentativo del coefficiente di maggiorazione dinamica del carico sia:

$$X_v = 0,4$$

– il fattore di Lewis valga:

$$y = 0,484 - \frac{2,865}{z} = 0,484 - \frac{2,865}{20} = 0,34$$

il valore del modulo secondo la formula di Lewis sarà:

$$m = \sqrt[3]{\frac{2\ M_{corr,3}}{\sigma_{amf}\ \ X_v\ \ z\ \lambda\ y}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times 774\ 765}{220 \times 0,4 \times 20 \times 15 \times 0,34}} = 5,56\ \text{mm}$$

si arrotonda tale cifra al valore unificato m = 6 mm (UNI 6586) ricavabile dal *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. I-125).
Occorre verificare la validità del coefficiente di maggiorazione dinamica del carico X_v.
I diametri primitivi delle due ruote dentate sono:

$$d_{p3} = m\ \ z_3 = 6 \times 20 = 120\ \text{mm}$$

$$d_{p4} = m\ \ z_4 = 6 \times 58 = 348\ \text{mm}$$

La velocità periferica del pignone 3 vale:

$$\omega_3 = \omega_2 = \frac{\omega_1}{3} = 26,2\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$v_3 = \omega_3\ \frac{d_{p3}}{2} = 26,2 \times 0,06 = 1,6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Considerando che:

$$X_v = \frac{A}{A + v_1}$$

con A = 4 per ingranaggi lenti con discreta precisione di lavorazione, si ha:

$$X_v = \frac{A}{A + v_1} = \frac{4}{4 + 1,6} = 0,7$$

essendo maggiore del valore ipotizzato X_v = 0,4 si conferma il valore del modulo m = 6 mm.
Per la verifica a usura occorre confrontare il valore della pressione massima p_{amm} ammissibile con la pressione massima scambiata fra i denti delle due ruote e fissando una durata h = 10 000 ore di funzionamento si esprime la velocità di rotazione del pignone 3 in giri al minuto e si ottiene:

$$n_3 = \frac{\omega_3\ 60}{2\ \pi} = \frac{26,2 \times 60}{2 \times \pi} = 250\ \frac{\text{giri}}{\text{min}}$$

$$p_{amm} = 24,5\ \frac{\text{HB}}{\sqrt[6]{n\ \ h}} = 24,5 \times \frac{300}{\sqrt[6]{250 \times 10\ 000}} = 631\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

La pressione effettivamente scambiata fra i denti delle due ruote risulta:

$$p_{max} = k_1 \sqrt{\frac{2\ M_{corr,3}}{b\ d_{p1}\ \text{sen}2\alpha}\left(\frac{1}{d_{p1}} + \frac{1}{d_{p2}}\right)} = 378 \times \sqrt{\frac{2 \times 774\ 765}{90 \times 120 \times \text{sen}40} \times \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{348}\right)} = 598\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

In cui la larghezza del dente è:

$$b = \lambda\ m = 15 \times 6 = 90 \text{ mm}$$

Poiché $p_{max} < p_{amm}$, la verifica ad usura ha dato esito positivo.