

VITE SENZA FINE / RUOTA ELICOIDALE

DERIVATO DAL TEMA D'ESAME
DELLA SESSIONE ORDINARIA 2019



Un'azienda che lavora nel campo del recupero dei R.A.E.E. (Rifiuti di Apparecchiature Elettriche ed Elettroniche) ha deciso di realizzare un macchinario per lavorare le cartucce dei toner esauriti, al fine di separare la componente plastica e metallo dai residui della polvere di toner, per recuperare più facilmente solo la componente solida (polietilene, metallo ecc.). La macchina prevede un corpo in acciaio sormontato da una tramoggia di carico, all'interno del quale ruotano due alberi gemelli e paralleli, dotati di coltelli laceratori, che afferrano le cartucce, le rompono e le scaricano a un sottostante nastro trasportatore (► Fig. 1). Gli alberi, di cui uno folle, vengono azionati da un motoriduttore a vite senza fine - ruota elicoidale. Al di sotto dello scarico delle cartucce, all'altezza del nastro trasportatore, viene previsto un impianto di aspirazione per captare la polvere di toner e inviarla all'interno di un contenitore provvisto di idoneo filtro.

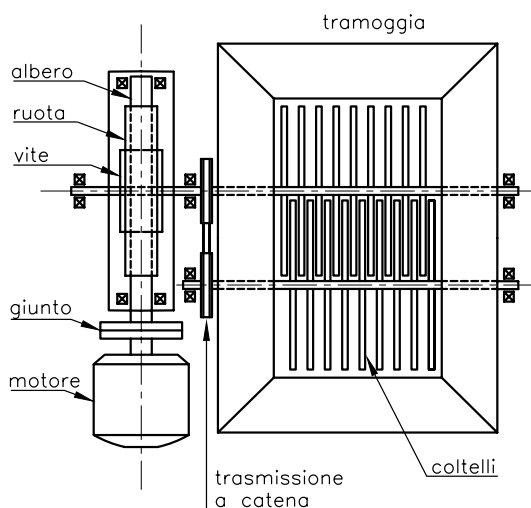


Fig. 1

Schema dell'impianto di triturazione.

PRIMA PARTE

Il candidato, facendo riferimento all'idea perseguita dall'azienda e valutando ogni parametro/ipotesi che ritenga necessari e congrui alla progettazione e realizzazione della macchina, dovrà effettuare:

- il dimensionamento del gruppo vite senza fine – ruota coniugata, sapendo che:
 - il modulo normale della dentatura m_n è pari a 7;
 - il numero di principi della vite è pari a 1;
 - l'angolo di inclinazione dell'elica β è pari a 6° ;
 - la lunghezza della vite è pari a 15 moduli;
 - la distanza dei supporti della vite è pari a 200 mm;
- il calcolo della potenza richiesta al motore elettrico, sapendo che:
 - la velocità di rotazione della vite è pari a 1260 giri/min;
 - il numero di denti della ruota è pari a 42;
 - l'angolo di attrito è pari a 2° ;
 - il materiale della vite è in acciaio da bonifica, mentre quello della ruota è in bronzo e la coppia (vite-ruota) è caratterizzata da una buona lavorazione a bagno d'olio.

SECONDA PARTE

1. Tenendo conto dei dati emersi dalla progettazione, calcolare le sollecitazioni che agiscono sulla vite verificando il valore massimo che si manifesta all'interno del nucleo della stessa.
2. La ruota, solidale all'albero, su cui sono montati i coltelli del laceratore, aziona tramite trasmissione per catena un altro albero gemello, su cui è montata l'altra serie di coltelli. Facendo riferimento allo schema proposto nella **figura 1**, calcolare la forza di lacerazione ottenuta con il meccanismo utilizzato, tenendo conto che l'effetto massimo tranciante del gruppo coltelli avviene indicativamente per un valore del diametro pari a 1/3 del diametro della ruota.

Tabella di riferimento per il proporzionamento della coppia vite senza fine – ruota elicoidale

SIMBOLO	GRANDEZZA	VSF	RE
u	Rapporto di ingranaggio	$u = z_r / z_v$	
β	Angolo dell'elica	β_v	β_r
m_t	Modulo trasversale	$m_n / \cos \beta_v$	$m_n / \sin \beta_r$
m_a	Modulo assiale	$m_n / \sin \beta_r$	$m_n / \cos \beta_v$
p_n	Passo normale	$p_n = m_n \pi$	
p_t	Passo trasversale	$p_{tv} = m_{tv} \pi$	$p_{tr} = m_{tr} \pi$
p_a	Passo assiale	$p_{av} = m_{av} \pi$	$p_{ar} = m_{ar} \pi$
p_e	Passo dell'elica sulla vite	$p_e = p_{av} z_v$	–
d_m	Diametro medio	$d_{mv} = m_{tv} z_v$	$d_{mr} = m_{tr} z_r$
h_a	Addendum	m_n	
h_f	Dedendum	$1,25 m_n$	
h	Altezza del dente	$2,25 m_n$	
d_a	Diametro di testa	$d_{av} = d_{mv} + 2 h_a$	$d_{ar} = d_{mr} + 2 h_a$
d	Diametro di piede	$d_{tv} = d_{mv} - 2 h_f$	$d_{tr} = d_{mr} - 2 h_f$
L	Lunghezza del filetto/dentatura	$L_v = (4 + 6) p_{av}$	$L_r = (6 + 10) m_n$
a	Intersasse	$(d_{mv} + d_{mr})/2$	

SOLUZIONE

PRIMA PARTE

Alcune premesse

Nei calcoli che seguono relativi all'accoppiamento vite senza fine – ruota elicoidale (di seguito, per brevità VSF-RE) si adotta il pedice r per la ruota e il pedice v per la vite.

L'angolo di pressione normale vale 20° .

Si attribuisce il valore $\beta_r = 6^\circ$ citato dal testo all'angolo dell'elica della ruota. Di conseguenza, l'angolo dell'elica della vite β_v è il suo complementare, quindi si ha:

$$\beta_v = 90^\circ - \beta_r = 90^\circ - 6^\circ = 84^\circ$$

In base alla teoria dell'ingranamento fra ruote dentate cilindriche elicoidali ad assi sghembi, affinché si abbia un ingranamento cinematicamente corretto tra i due organi rotanti, la somma degli angoli delle eliche, misurati con riferimento ai rispettivi assi, deve essere pari all'angolo tra i due assi; nel caso della VSF-RE i due assi sono sghembi, quindi a 90° . Inoltre, i versi delle due eliche devono essere concordi: per esempio, nel caso in esame entrambi saranno destrorsi.

Nel caso della VSF-RE, relativamente alla vite, la Normativa non fa riferimento al concetto di diametro primitivo né al cerchio primitivo, bensì al *cilindro medio*: è un cilindro convenzionale, visto in elevazione

nella **figura 2a**, avente il medesimo asse della vite e con diametro medio d_m , rispetto al quale vengono derivate le grandezze geometriche della dentatura/filetto: il diametro medio è definito come prodotto tra il modulo trasversale e il numero di principi della vite; la circonferenza avente il diametro medio d_m prende il nome di *circonferenza media* (Norma UNI 4760).

Il *profilo assiale* è la vista che si ottiene sezionando la vite con un piano meridiano; su questo piano si individuano alcune grandezze fondamentali, quali il modulo assiale m_a e il passo assiale p_a ; su di esso giace, sempre riferendosi alla vite, la componente assiale F_{av} della forza risultante F scambiata fra due denti in presa; tale componente assolve anche alla funzione di forza tangenziale F_{tr} sulla ruota elicoidale: è la componente che genera il momento torcente M_{tr} agente sulla ruota.

Per quanto riguarda la ruota, la Normativa introduce il concetto di *toro medio*: non si tratta di un cilindro vero e proprio, bensì di un anello torico concavo avente il proprio asse di rivoluzione coincidente con l'asse di rotazione della ruota. Si definisce *piano mediano della ruota* il piano perpendicolare all'asse della ruota e contenente l'asse della vite (► **Fig. 2a**). Sezionando la ruota con un qualunque piano meridiano, si nota come il dente assuma una forma concava, grosso modo di mezzaluna, delimitata da due archi di cerchio, uno di piede e l'altro di testa; esiste inoltre un arco di cerchio virtuale circa medio, per l'appunto il *profilo del toro medio*; l'arco di piede è detto *toro di piede*, mentre il bordo esterno del dente non è detto, come ci si aspetterebbe, *toro di testa* bensì, semplicemente, *gola*. Se si prolunga l'arco di cerchio che costituisce il profilo del toro medio, si ottiene un cerchio completo: è il cerchio generatore del profilo torico; questo cerchio particolare gode delle due seguenti proprietà: coincide con la circonferenza media della vite coniugata e ha come raggio di rivoluzione l'interasse a tra ruota e vite.

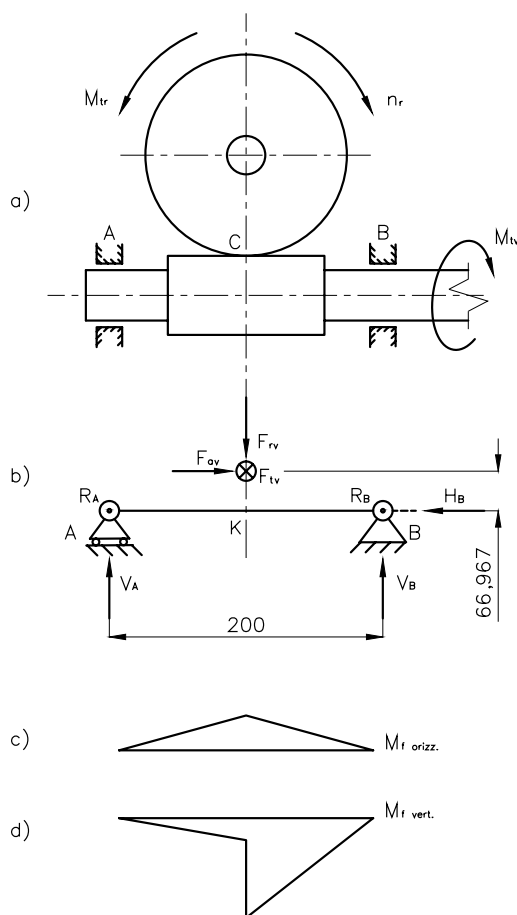


Fig. 2

Vista schematica dell'accoppiamento VSF-RE:

- a) la ruota è rappresentata nel suo piano mediano, a contatto con il toro medio (cilindro medio) della vite;
- b) trave matematica della vite in cui nel punto C sono applicate le tre componenti della forza risultante trasmessa dalla ruota alla vite;
- c) diagramma del momento flettente nel PO;
- d) diagramma del momento flettente nel PV.

Il punto di contatto tra il profilo del toro medio (ruota) e il cilindro medio (vite) è indicato come punto C nelle **figura 2** e **3**; in tale punto, il raggio della ruota è detto *raggio medio*, metà del diametro medio; il diametro medio è proporzionale al modulo trasversale secondo la formula generale:

$$d_m = m_t z$$

Il rendimento della coppia vite senza fine - ruota elicoidale vale:

$$\eta_{vsf} = \frac{\operatorname{tg} \beta_r}{\operatorname{tg} (\beta_r + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} 6^\circ}{\operatorname{tg} 8^\circ} = 0,748$$

Il valore di rendimento appare decisamente basso se paragonato con quello dei comuni ingranaggi cilindrici: la ragione consiste nel fatto che mentre negli ingranaggi cilindrici a denti elicoidali, anche ad assi sghembi, il contatto è sempre puntiforme, nell'accoppiamento VSF-RE il contatto è lineare. Inoltre, le perdite dovute agli attriti nei cuscinetti volventi e allo sbattimento olio vengono contabilizzate tramite una voce a parte: nel presente caso si assume un rendimento $\eta_{cv} = 0,98$.

Il testo fornisce alcuni dati fondamentali riguardanti il dimensionamento della trasmissione, in particolare il modulo normale, l'angolo dell'elica, il numero di principi della vite; fornisce inoltre alcune indicazioni generali sui materiali da costruzione impiegati. In base a questi dati si può risalire al momento torcente applicato sulla ruota, utilizzando la formula del calcolo a fatica secondo Lewis, in cui stavolta il modulo normale è noto mentre l'incognita è il momento torcente M_{tr} , indispensabile per risalire alla potenza.

a) **Proporzionamento del gruppo vite senza fine - ruota elicoidale**

Noti il numero dei denti $z_r = 42$ per la ruota e il numero dei principi (z_v), unico, per la vite, risulta immediato trovare il rapporto u di ingranaggio:

$$u = \frac{z_r}{z_v} = \frac{42}{1} = 42$$

Il rapporto di ingranaggio non deve essere confuso con il rapporto di trasmissione comunemente utilizzato nelle trasmissioni a cinghia e a ruote dentate, in quanto non può essere posto in relazione con il rapporto fra i diametri.

Moduli

Il modulo normale è ovviamente unificato ed è comune a vite e ruota, invece, i moduli trasversali sono diversi; si calcola il modulo trasversale della vite:

$$m_{tv} = \frac{m_n}{\cos \beta_v} = \frac{m_n}{\sin \beta_r} = \frac{7}{\cos 84^\circ} = \frac{7}{\sin 6^\circ} = 66,967 \text{ mm}$$

Il modulo trasversale della ruota vale:

$$m_{tr} = \frac{m_n}{\cos \beta_r} = \frac{7}{\cos 6^\circ} = 7,035 \text{ mm}$$

Il modulo assiale della vite m_{av} coincide con il modulo trasversale della ruota. Analogamente, il modulo assiale della ruota m_{ar} coincide con il modulo trasversale della vite.

Passi

Il passo normale, valido sia per la vite sia per la ruota, vale:

$$p_n = m_n \pi = 7 \times \pi = 21,991 \text{ mm}$$

Il passo trasversale della vite vale:

$$p_v = m_v \pi = 66,967 \times \pi = 210,384 \text{ mm}$$

Il passo trasversale della ruota vale:

$$p_r = m_r \pi = 7,035 \times \pi = 22,1 \text{ mm}$$

Il passo assiale della vite vale:

$$p_{av} = m_{av} \pi = 7,035 \times \pi = 22,1 \text{ mm}$$

Il passo assiale della ruota vale:

$$p_{ar} = m_{ar} \pi = 66,967 \times \pi = 210,384 \text{ mm}$$

Il passo dell'elica sulla vite vale:

$$p_{ev} = p_{av} z_v = 22,1 \times 1 = 22,1 \text{ mm}$$

L'angolo di pressione trasversale della ruota, coincidente con l'angolo di pressione assiale della vite vale:

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos 6^\circ} = 0,365975$$

$$\alpha_t = \operatorname{arctg} 0,365975 = 20,1^\circ$$

Diametri medi

Il diametro medio della ruota vale:

$$d_{mr} = m_r z_r = 7,035 \times 42 = 295,62 \text{ mm}$$

Il diametro medio della vite vale:

$$d_{mv} = m_v z_v = 66,967 \times 1 = 66,967 \text{ mm}$$

Dimensioni delle altre grandezze caratterizzanti

L'addendum vale:

$$h_a = m_n = 7 \text{ mm}$$

Il dedendum vale:

$$h_f = 1,25 m_n = 1,25 \times 7 = 8,75 \text{ mm}$$

L'altezza del dente vale:

$$h = h_a + h_f = 7 + 8,75 = 15,75 \text{ mm}$$

Il diametro di testa della vite vale:

$$d_{av} = d_{mv} + 2 h_a = 66,967 + 2 \times 7 = 80,967 \text{ mm}$$

Il diametro di piede della vite vale:

$$d_{fv} = d_{mv} - 2 h_f = 66,967 - 2 \times 8,75 = 49,467 \text{ mm}$$

Il diametro di testa della ruota vale:

$$d_{ar} = d_{mr} + 2 h_a = 295,62 + 2 \times 7 = 309,62 \text{ mm}$$

Il diametro di piede della ruota vale:

$$d_{fr} = d_{mr} - 2 h_f = 295,62 - 2 \times 8,75 = 278,12 \text{ mm}$$

La lunghezza L_v del tratto filettato della vite (deve risultare minore della distanza fra i supporti) vale:

$$L_v = (4 \div 6) p_{av} = 5 \times 22,1 = 110,5 \text{ mm} < 200 \text{ mm}$$

La lunghezza L_r della ruota vale:

$$L_r = (6 \div 10) m_n = 8 \times 7 = 56 \text{ mm}$$

L'interasse a vale:

$$a = \frac{d_{mr} + d_{mv}}{2} = \frac{295,62 + 66,967}{2} = 181,3 \text{ mm}$$

Velocità

La frequenza di rotazione della ruota vale:

$$n_r = \frac{n_v}{u} = \frac{1260}{42} = 30 \frac{\text{giri}}{\text{min}}$$

La velocità angolare della ruota vale:

$$\omega_r = \frac{2 \pi n_r}{60} = \frac{2 \times \pi \times 30}{60} = 3,14 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La velocità angolare della vite vale:

$$\omega_v = \frac{2 \pi n_v}{60} = \frac{2 \times \pi \times 1260}{60} = 132 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La velocità periferica della ruota vale:

$$v_r = \omega_r \frac{d_{mr}}{2} = 3,14 \times \frac{295,62}{2 \times 10^3} = 0,464 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocità periferica della vite vale:

$$v_v = \omega_v \frac{d_{mv}}{2} = 132 \times \frac{66,967}{2 \times 10^3} = 4,42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Tabella riassuntiva dei dati relativi al proporzionamento VSF-RE

SIMBOLO	GRANDEZZA	VSF	RE
z	Numero denti/filetti	$z_v = 1$	$z_r = 42$
u	Rapporto di ingranaggio	$u = z_r / z_v = 42$	
β	Angolo dell'elica	$\beta_v = 84^\circ$	$\beta_r = 6^\circ$
m_n	Modulo normale	7 mm	
m_t	Modulo trasversale	66,967 mm	7,035 mm
m_a	Modulo assiale	7,035 mm	66,967 mm
p_n	Passo normale	21,991 mm	
p_t	Passo trasversale	210,384 mm	22,1 mm
p_a	Passo assiale	22,1 mm	210,384 mm
p_e	Passo dell'elica sulla vite	22,1 mm	–
α_n	Angolo di pressione normale	20°	
α_t	Angolo di pressione trasversale	–	$20,1^\circ$
α_a	Angolo di pressione assiale	$20,1^\circ$	–
h_a	Addendum	7 mm	
h_f	Dedendum	8,75 mm	
h	Altezza dente	15,75 mm	
d_m	Diametro medio	66,967 mm	295,62 mm
d_a	Diametro di testa	80,967 mm	309,62 mm
d_f	Diametro di piede	49,467 mm	278,12 mm
L	Lunghezza del filetto/dentatura	$L_v = 110,5$ mm	$L_r = 56$ mm
a	Interasse	181,3	

b) *Calcolo della potenza*

Come materiale, per la ruota si opta per il bronzo Cu Al 10 Fe 3, avente un carico di rottura $R_m = 620 \div 700$ N/mm²: si sceglie un valore circa intermedio pari a 640 N/mm². Il riduttore opera costantemente con un unico verso di rotazione, sottoposto a continui e improvvisi sovraccarichi anche molto intensi nel momento in cui il materiale versato nella tramoggia viene afferrato dai coltelli: si assume prudenzialmente il grado di sicurezza $g_R = 3,8$ (a compressione, per getti); si calcola la tensione ammissibile a fatica pulsante:

$$\sigma_{amf} = \frac{2}{3} \times \frac{R_m}{g_R} = \frac{2}{3} \times \frac{640}{3,8} \approx 112 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Si richiama la formula relativa al metodo di calcolo a fatica della ruota elicoidale, nota come formula di Lewis:

$$m_n = \sqrt[3]{\frac{2 M_{tr} \cos \beta_r}{\sigma_{amf} X_v z \lambda y}}$$

Si elevano entrambi i membri al cubo:

$$m_n^3 = \frac{2 M_{tr} \cos \beta}{\sigma_{amf} X_v z \lambda y}$$

Occorre definire i valori numerici dei diversi fattori che compaiono nella formula. Si calcola il coefficiente X_v di maggiorazione dinamica del carico, essendo noto il valore di v_r e attribuendo al coefficiente empirico A il valore di 5:

$$X_v = \frac{A}{A + v_r} = \frac{5}{5 + 0,464} = 0,915$$

Si sceglie il valore del coefficiente λ che definisce la lunghezza del dente in base al modulo: $\lambda = 12$. Si ricava il fattore di Lewis dall'apposito abaco riportato nella **tabella 1.88** relativa ai coefficienti y di Lewis riportata nel *Manuale di Meccanica* (Seconda Edizione, Hoepli 2016, p. 1-127): per $z = 42$ denti si assume $y = 0,395$.

Si pone a primo membro il momento torcente agente sulla ruota, incognito, quindi si inseriscono i valori numerici:

$$M_{tr} = \frac{m_n^3 \sigma_{amf} X_v z \lambda y}{2 \cos \beta} = \frac{7^3 \times 112 \times 0,915 \times 42 \times 12 \times 0,395}{2 \times \cos 6^\circ \times 1000} \approx 3518 \text{ N m}$$

Il momento torcente appena trovato è di tipo ideale, al netto delle perdite. Il momento reale M'_{tr} che tiene conto delle perdite vale:

$$M'_{tr} = \frac{M_{tr}}{\eta_{vsf} \eta_{cv}} = \frac{3518}{0,748 \times 0,98} = 4799,2 \text{ N m}$$

Si assumerà questo valore di momento per risalire alle forze scambiate tra vite e ruota e per calcolare la potenza effettiva P_{eff} del motore agente sulla vite, dato che quest'ultimo valore del momento tiene conto delle perdite, essendo:

$$P_r = P_{eff} \eta_{vsf} \eta_{cv}$$

Sostituendo si ottiene:

$$P_{eff} = \frac{M_{tr} \omega_r}{\eta_{vsf} \eta_{cv}} = M'_{tr} \omega_r$$

Da cui si ricava:

$$P_{eff} = M'_{tr} \omega_r = 4799,2 \times 3,14 \times 10^{-3} \approx 15 \text{ kW}$$

SECONDA PARTE

1) *Calcolo delle forze scambiate tra ruota e vite senza fine*

La forza risultante F scambiata dalla vite motrice con la ruota condotta non è perfettamente normale alla superficie del dente, ma è inclinata dell'angolo d'attrito φ ; solo nel caso ideale, cioè senza attriti, la forza sarebbe normale alla superficie del dente. Ne consegue che il metodo più efficace per visualizzare la forza F consiste nella sua scomposizione in tre componenti orientate secondo gli assi: una forza radiale F_r , una assiale F_a e una trasversale F_t . I versi delle forze rappresentati nella **figura 3** indicano le reazioni (non le azioni), trasferite dalla ruota alla vite, allo scopo di averle già predisposte come versi per svolgere più avanti il calcolo delle reazioni vincolari. Se si volesse visualizzare in 3D la risultante F sulla **figura 2a**, la si immagini applicata nel punto C, entrante (secondo l'osservatore) nel piano del disegno e ulteriormente inclinata verso il basso.

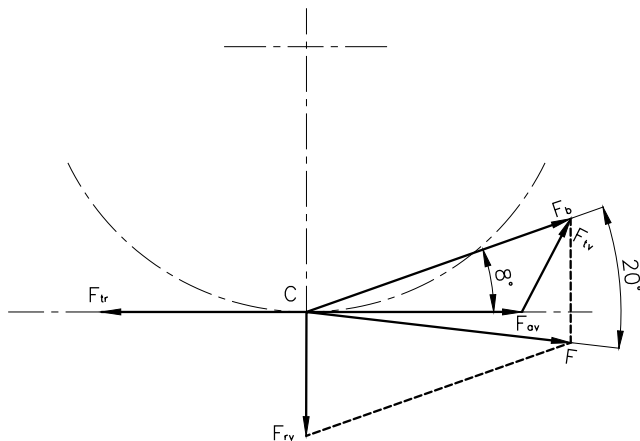


Fig. 3

Scomposizione tridimensionale della forza risultante scambiata tra due denti in presa nell'accoppiamento VSF-RE. Il verso della forza F è disegnato in modo da rappresentare la reazione trasmessa dalla ruota alla vite.

La procedura di calcolo delle forze consiste nell'eseguire una prima scomposizione della forza F in due componenti tra loro normali:

- una componente F_b giacente sul piano orizzontale di tangenza con i cilindri medi (primitivi) della vite e della ruota e contenente il punto di applicazione C ;
- una componente radiale F_r perpendicolare al piano di cui sopra e orientata verso il basso, in modo da schiacciare la vite sui suoi supporti A e B .

Rispetto alla F_b la F è inclinata dell'angolo di pressione normale da 20° . Le due componenti valgono rispettivamente:

$$F_b = F \cos \alpha_n$$

$$F_r = F \sin \alpha_n$$

La componente F_b giace sul piano tangente al cilindro medio della vite che è anche perpendicolare al piano mediano della ruota; il suddetto piano può essere facilmente intuito osservando la [figura 2a](#) immaginando di tracciare quel particolare piano, perpendicolare al disegno, contenente il punto C e tangente al cilindro medio della vite: la componente F_b giace su questo piano, ha come punto di applicazione il punto C , esce dal piano del disegno in direzione opposta all'osservatore con un angolo di inclinazione di $(\beta + \varphi)$ che vale 8° . La componente F_b viene a sua volta scomposta in altre due componenti:

- una componente F_a assiale agente lungo l'asse della vite;
 - una componente F_t tangenziale direttamente generata dalla coppia motrice proveniente dal motore.
- Con riferimento al momento reale M'_{tr} attivo sulla ruota e precedentemente calcolato, risulta immediato ottenere la forza F_{tr} tangenziale operante, come anticipato poc'anzi, da forza motrice della ruota:

$$F_{tr} = 2 \frac{M'_{tr}}{d_r} = \frac{2 \times 4799,2}{0,29562} = 32\,468 \text{ N}$$

La forza F_{tr} tangenziale della ruota è la reazione alla forza motrice F_{av} assiale della vite: le due forze quindi coincidono come modulo ma sono opposte come verso (► [Fig. 3](#)). Sempre dalla [figura 3](#) è possibile dedurre la seguente relazione:

$$\operatorname{tg} (\beta + \varphi) = \frac{F_{tr}}{F_{av}}$$

da cui si ricava la forza F_{tr} tangenziale della vite:

$$F_{tr} = F_{av} \operatorname{tg} (\beta + \varphi) = F_{tr} \operatorname{tg} (\beta + \varphi) = 32\,468 \times \operatorname{tg} 8^\circ = 4563 \text{ N}$$

La forza F_{tr} tangenziale della vite coincide con la forza F_{ar} assiale della ruota. Ciò è confermato dal seguente calcolo di verifica in cui, riferendosi stavolta alla ruota, si deriva la forza F_{ar} assiale della ruota (uguale e opposta, si ricordi, alla F_{tr}) dalla forza tangenziale F_{tr} (uguale e opposta alla F_{av}), in quanto esse costituiscono i cateti di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa (la forza F_b) inclinata dell'angolo $(\beta + \varphi)$:

$$F_{ar} = F_{tr} \operatorname{tg} (\beta + \varphi) = 32\,468 \times \operatorname{tg} 8^\circ = 4563 \text{ N}$$

Per il calcolo delle forze radiali conviene prendere in considerazione la forza F_b precedentemente definita e rappresentata nella **figura 3**; con riferimento alla vite si individua il triangolo rettangolo avente come cateti F_{av} ed F_{tr} . Applicando il teorema di Pitagora si ottiene:

$$F_b = \sqrt{F_{av}^2 + F_{tr}^2} = \sqrt{32\,468^2 + 4563^2} = \sqrt{1\,074\,991\,993} = 32\,787 \text{ N}$$

Nota la forza F_b risulta immediato trovare la forza F_{rv} radiale della vite (orientata verso il basso), uguale e opposta alla forza F_{rr} radiale ruota (orientata verso l'alto):

$$F_{rv} = F_b \operatorname{tg} \alpha_n = 32\,787 \times \operatorname{tg} 20^\circ = 11\,933,5 \text{ N}$$

Anche in questo caso è possibile eseguire un calcolo di verifica in cui si deriva la forza F_{rr} radiale della ruota dalla forza F_{tr} tangenziale della ruota mediante un doppio ribaltamento; infatti, sempre con riferimento alle corrispondenze tra le forze evidenziate in precedenza e osservando la **figura 3**, valgono le seguenti relazioni:

$$F_b \cos (\beta + \varphi) = F_{tr}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{F_{rr}}{F_b}$$

Sostituendo si ottiene:

$$F_{rr} = F_b \operatorname{tg} \alpha_n = F_{tr} \times \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos (\beta + \varphi)} = 32\,468 \times \frac{\operatorname{tg} 20^\circ}{\cos 8^\circ} = 11\,933,6 \text{ N}$$

Si compila la seguente tabella riepilogativa.

FORZE DELLA VITE		FORZE DELLA RUOTA		VALORE DEL MODULO
Forza trasversale della vite	F_{tr}	Forza assiale della ruota	F_{ar}	4563 N
Forza assiale della vite	F_{av}	Forza trasversale della ruota	F_{tr}	32 468 N
Forza radiale della vite	F_{rv}	Forza radiale della ruota	F_{rr}	11 933,6 N

Calcolo delle reazioni vincolari sui supporti della vite senza fine

Le forze trasmesse alla vite (provenienti dalla ruota in quanto reazioni) vengono posizionate nella mezzeria della campata di lunghezza $AB = 200 \text{ mm}$, nel punto C di contatto tra il piano mediano della ruota e il cilindro medio della vite, come si nota nella **figura 2b**. La presenza della forza F_{av} della vite genera una reazione vincolare assiale nella cerniera destra B, nella quale si rende necessario montare un cuscinetto reggisplinta. Si esegue quindi la proiezione orizzontale delle forze:

$$H_B = F_{av} = 32\,468 \text{ N}$$

Essendo le forze e le reazioni vincolari disposte in 3D, occorre condurre due analisi separate, una sul piano orizzontale e una sul piano verticale. Sul piano orizzontale, per ovvie ragioni di simmetria, la forza F_{rv} entrante nel piano del disegno, genera due reazioni uguali e contrarie, uscenti dal piano del disegno:

$$R_A = R_B = \frac{F_{rv}}{2} = \frac{4563}{2} = 2281,5 \text{ N}$$

Sul piano verticale agiscono due forze, la forza assiale orizzontale e la forza radiale verticale. Si inizia con un'equazione di equilibrio in direzione verticale, attribuendo il verso positivo alle forze rivolte verso l'alto:

$$V_A + V_B - F_{rv} = 0$$

Si redige un'equazione di equilibrio di momento assumendo il vincolo A come polo, attribuendo il segno positivo ai momenti antiorari:

$$V_B \times 200 - F_{rv} \times 100 - F_{av} \times 33,48 = 0$$

$$V_B = \frac{11\,933,6 \times 100 + 32\,468 \times 33,48}{200} = \frac{2\,280\,389}{200} = 11\,402 \text{ N}$$

Si riprende la proiezione verticale:

$$V_A = F_{rv} - V_B = 11\,933,6 - 11\,402 = 531,6 \text{ N}$$

Calcolo delle caratteristiche di sollecitazione di momento flettente

– Nel piano orizzontale

Il momento massimo si trova nel punto K di mezzzeria. Si attribuisce il segno positivo ai momenti antiorari, come previsto dalle convenzioni sulle caratteristiche di sollecitazione:

$$M_O = -R_A \times 100 = -2281,5 \times 100 = -228\,150 \text{ N mm} = -228,15 \text{ N m}$$

– Nel piano verticale

Si esegue il calcolo della caratteristica di momento flettente procedendo da sinistra a destra, con l'ascissa curvilinea x avente origine nel vincolo sinistro A. Anche nel PV si attribuisce il segno positivo ai momenti antiorari. Tratto A-K:

$$M - V_A x = 0$$

$$M = V_A x = 531,6 x$$

Nel punto A il momento vale 0; immediatamente a monte del punto K il momento raggiunge il seguente valore:

$$M_K = 531,6 \times 100 = 53\,160 \text{ N mm} = 53,16 \text{ N m}$$

Nel tratto K-B si assume l'ascissa curvilinea x con origine nel punto K:

$$M - V_A (100 + x) - F_{av} \times \frac{d_{mv}}{2} + F_{rv} x = 0$$

$$\begin{aligned} M &= V_A (100 + x) + F_{av} \times 33,80 - F_{rv} x = 531,6 \times (100 + x) + 32\,468 \times 33,48 - 11\,933,6 x = \\ &= 53\,160 + 531,6 x + 1\,087\,029 - 11\,933,6 x = 1\,140\,189 - 11\,402 x \end{aligned}$$

Ponendosi immediatamente a valle del punto K con ascissa $x = 0$, il momento vale $M_K = 1\,140\,189 \text{ N mm}$, ovvero $1\,140,2 \text{ Nm}$: questo è il momento massimo M_V nel PV.

In conclusione si verifica che nel punto B, per $x = 100 \text{ mm}$, il momento flettente vale 0:

$$M_V = \frac{1\,140\,189 - 11\,402 \times 100}{1000} \approx 0$$

I diagrammi dei due momenti flettenti, nel PO e nel PV, sono riportati rispettivamente nelle **figure 2c** e **2d**.

Sollecitazioni agenti sul nucleo della vite

Si esegue la verifica strutturale sul nocciolo della vite, il cui diametro coincide con il diametro di piede $d_f = 49,467 \text{ mm}$: la verifica della vite verrà eseguita sulla sezione di nocciolo più sollecitata, secondo il metodo della flessione-torsione. Occorre innanzitutto valutare il momento flettente massimo; esso si trova nella mezzeria ed è pari alla somma vettoriale dei due momenti massimi, M_O nel PO e M_V nel PV, ortogonali fra loro, somma che si esegue con il teorema di Pitagora:

$$M_{f,max} = \sqrt{M_O^2 + M_V^2} = \sqrt{(-228,15)^2 + 1\,140,2^2} \approx 1\,163 \text{ N m}$$

Il momento torcente applicato sulla vite vale:

$$M_{tv} = \frac{P_{eff}}{\omega_v} = \frac{15\,000}{132} \approx 114 \text{ N m}$$

Con riferimento alla **figura 2a**, si è ipotizzato che la vite ruoti in senso orario, se osservata da destra, dal lato motore. Si calcola ora il momento flettente ideale nella sezione di mezzeria:

$$M_{f,id} = \sqrt{M_{f,max}^2 + 0,75 M_{tv}^2} = \sqrt{1\,163^2 + 0,75 \times 114^2} = 1\,167,2 \text{ N m}$$

Il modulo resistente a flessione della sezione di nocciolo della vite vale:

$$W_f = \frac{\pi}{32} \times d_f^3 = \frac{\pi}{32} \times 49,467^3 = 11\,883,5 \text{ mm}^3$$

Si applica la formula di Navier per ottenere la tensione di lavoro:

$$\sigma_l = \frac{M_{f,id}}{W_f} = \frac{1\,167\,200}{11\,883,5} = 98 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Come materiale per la vite si adottano frequentemente acciai da cementazione quale, ad esempio, il C 15, avente un carico di rottura $R_m = 500 \div 650 \text{ N/mm}^2$: si sceglie un valore circa intermedio pari a 550 N/mm^2 . Si calcola il grado di sicurezza g_R , considerando che la vite lavora a fatica pulsante:

$$g_R = \frac{2}{3} \times \frac{R_m}{\sigma_l} = \frac{2}{3} \times \frac{550}{98} = 3,74$$

Un valore di g_R dell'ordine di $3 \div 4$ risulta più che adeguato per questo tipo di applicazione.

2) Calcolo della forza di lacerazione applicata sui coltelli

Sia F_c la forza di taglio erogata dal singolo coltello, ricordando che il macchinario presenta $9 + 9$ coltelli, equamente ripartiti sui due alberi. La trasmissione a catena fra i due alberi fa sì che essi ruotino

entrambi nello stesso senso; pertanto, il pezzo viene triturato con un'azione di taglio tipo forbice, con i coltelli di un albero che aggrediscono il pezzo dall'alto in basso, quelli dell'altro albero che tagliano dal basso verso l'alto. La trasmissione a catena fra i due alberi ripartisce la coppia motrice in egual modo fra i due alberi. La coppia motrice è quella agente sulla ruota elicoidale, calcolata in precedenza, al netto delle perdite: essa vale $M_{tr} = 3518 \text{ N m}$. Il testo informa inoltre che l'effetto massimo tranciante del gruppo coltelli avviene indicativamente per un valore del diametro pari a $1/3$ del diametro della ruota; il diametro della ruota preso in considerazione è il diametro di testa $d_a = 309,62 \text{ mm}$. Sia d_t il diametro di taglio:

$$d_t = \frac{1}{3} d_a = \frac{1}{3} \times 309,62 \approx 103 \text{ mm}$$

Si compila un'equazione di equilibrio di momento torcente:

$$M_{tr} = 18 F_c \times \frac{d_t}{2}$$

Si inseriscono i valori numerici:

$$3518 = 18 F_c \times \frac{0,103}{2}$$

La forza totale di taglio vale:

$$18 F_c = 2 \times \frac{3518}{0,103} = 68\,311 \text{ N}$$

La forza di taglio sul singolo coltello vale:

$$F_c = \frac{68\,311}{18} \approx 3800 \text{ N}$$